11.1.2 Číselné obory, množiny, výroky

Předpoklady:

Př. 1: Vypiš číselné obory používané ve středoškolské matematice. U každého oboru uveď označení a příklad toho, co pomocí daných čísel popisujeme.

Každý obor je podmnožinou následujícího.

- přirozená čísla (N): vyjadřují počet objektů,
- celá čísla (Z): můžeme vyjádřit i dluhy
- racionální čísla (Q): můžeme vyjádřit i části celku,
- reálná čísla (R): můžeme vyjádřit libovolnou vzdálenost,
- komplexní čísla (C): v oboru reálných čísel má řešení každá algebraická rovnice.

Př. 2: Sestav tabulku základních složených výroků a jejich negací.

Výrok	Spojka	Zápis	Negace
konjunkce	a	$a \wedge b$	$\neg a \vee \neg b$
disjunkce	nebo	$a \vee b$	$\neg a \wedge \neg b$
implikace	Jestliže …, pak	$a \Rightarrow b$	$a \wedge \neg b$
ekvivalence	Právě když …,	$a \Leftrightarrow b$	$\neg a \Leftrightarrow b$ nebo $a \Leftrightarrow \neg b$

Pedagogická poznámka: Žáci u negací často spoléhají na tabulky, ve kterých však negace uvedeny nejsou.

Př. 3: Vysvětli pojmy: a) uzavřenost množiny vzhledem k operaci
b) inverzní prvek. Uveď příklady.

a) uzavřenost množiny vzhledem k operaci
Množina je vzhledem k operaci uzavřená, právě když jejím výsledkem pro všechna čísla z množiny je opět prvek této množiny.
Například přirozená čísla jsou uzavřená vzhledem k operaci sčítání (součet dvou čísel přirozených je opět číslo přirozené), není uzavřená vzhledem k odčítání (rozdíl dvou přirozených čísel nemusí být číslo přirozené: například $2-6=-4$).

b) inverzní prvek
Inverzní prvek ke zvolenému prvku je prvek, který z timto prvkem dá neutrální prvek (pro sčítání 0, pro násobení 1). Například pro sčítání je inverzním prvkem ke 2 číslo -2 ($2+(-2)=0$), pro násobení je inverzním prvkem k číslu 2 číslo $\frac{1}{2}$ ($2\cdot\frac{1}{2}=1$).

Př. 4: Jsou dány podmnožiny přirozených čísel *A*, *B*. Platí $A = \{2;4;7\}$. Urči množinu *B*, pokud platí: a) $A \cap B = \{2;7\}$ b) $A \cup B = \{2;3;4;7;15\}$.
Pokud má příklad více řešení najdi množinu *B* s nejmenším možným počtem prvků a popiš společnou vlastnost všech množin, které by byly správným řešením.

a) $A \cap B = \{2;7\}$

$\Rightarrow$ Průnik množiny *B* s množinou *A* obsahuje prvky 2 a 7, neobsahuje prvek 4 (který je prvkem množiny *A*) $\Rightarrow$ množinou *B* může být libovolná množina, která obsahuje prvky 2 a 7 a neobsahuje prvek 4, množinou s nejmenším počtem prvků je množina $B = \{2;7\}$.

b) $A \cup B = \{2;3;4;7;15\}$

$\Rightarrow$ Sjednocení množiny *B* s množinou *A* obsahuje prvky $\{2;3;4;7;15\}$ $\Rightarrow$ množina *B* musí obsahovat prvky 3 a 15 (nejsou v množině *A*, ale jsou ve sjednocení $A \cup B$), může obsahovat prvky 2,4,7 (jsou v *A* i ve sjednocení) a nesmí obsahovat jiné prvky (takový prvek by se pak nutně musel objevit ve sjednocení $A \cup B$. Množinou s nejmenším počtem prvků je pak množina $B = \{3;15\}$

Př. 5: Vyslov negace následujících výroků:
a) Za pololetí zameškal nejvýše tři písemky.
b) Domácí úkol odevzdali právě dva studenti..
c) Teď je ve vlaku nebo ve škole..
d) Všichni se ho rádi zbavili.
e) Nikdo to neuvidí.
f) Všude je pusto a prázdno.
g) Kdo se bojí, nesmí do lesa.

a) Za pololetí zameškal nejvýše tři písemky.
Za pololetí zameškal alespoň čtyři písemky.

b) Domácí úkol odevzdali právě dva studenti..
Domácí úkol odevzdal jeden, žádný nebo alespoň tři studenti.

c) Teď ve vlaku nebo ve škole..
Není ani ve vlaku ani ve škole.

d) Všichni se ho rádi zbavili.
Alespoň jeden se ho zbavil nerad.

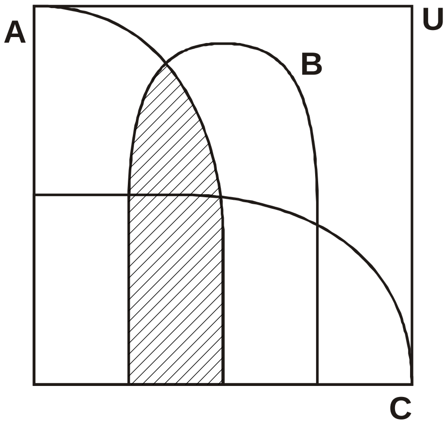
e) Nikdo to neuvidí.
Alespoň někdo to uvidí.

f) Všude je pusto a prázdno.
Alespoň někde není pusto nebo prázdno.

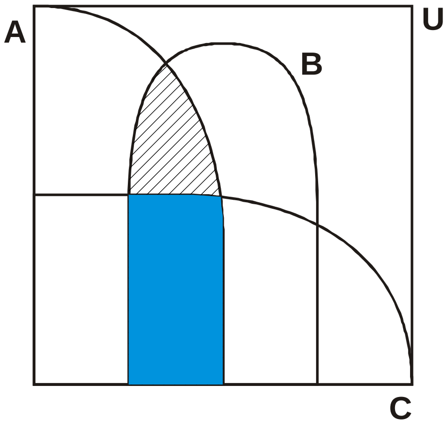
g) Kdo se bojí, nesmí do lesa.
Bojí se a smí do lesa.

Př. 6: Pomocí Vennových diagramů rozhodni, zda se rovnají množiny $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C')$ a $(A \cap B)$. Výsledek se pokus zdůvodni i úvahou.

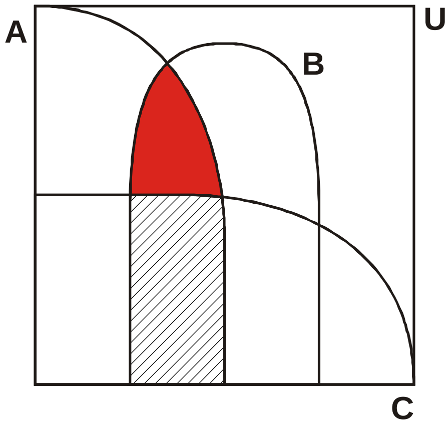
Vyznačíme obě množiny na Vennově diagramu a porovnáme oba výsledky.
Průnik $A \cap B$.



Průnik $A \cap B \cap C$



Průnik $A \cap B \cap C'$



Je vidět, že sjednocením obou barevných množinu opět získáme množinu $A \cap B$.

Úvaha: Všechny prvky náleží buď do množiny *C* nebo do množiny C', proto sjednocení průniků libovolné množiny (v našem případě množiny $A \cap B$) s množinami *C* a C' obsahuje všechny prvky této množiny.

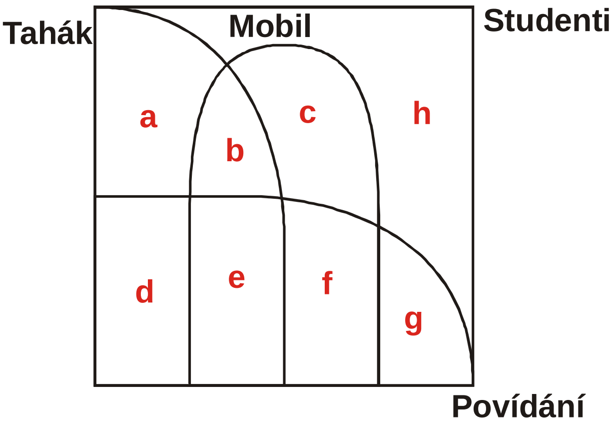
Př. 7: Pro která reálná *x* je interval *A* podmnožinou intervalu *B*, je-li: $A = \langle 2x; x+3 \rangle$, $B = \langle -1,4 \rangle$.

Pokud má být interval *A* podmnožinou intervalu *B* musí platit:

- $2x \le x+3 \Rightarrow x \le \frac{3}{2}$ (aby levá hrana intervalu byla menší než pravá),
- $2x \ge -1 \Rightarrow x \ge -\frac{1}{2}$ (všechna čísla intervalu *A* jsou větší nebo rovna nejmenšímu číslu intervalu *B*)
- $x+3 \le 4 \Rightarrow x \le 1$(všechna čísla intervalu *A* jsou menší nebo rovna největšímu číslu intervalu *B*)

$\Rightarrow$ interval *A* je podmnožinou intervalu *B* pro $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; 1 \right\rangle$.

Př. 8: Hodina matematiky je v plném proudu. Tahák na biologii si píše 9 studentů, na mobilu si ťuká SMS 10 přítomných a 12 studentů se tiše baví se spolusedícím. Celkem je ve třídě 30 studentů, ale pouze 6 jich dělá dvě z uvedených činností najednou. Studentů, kteří si pouze píšou tahák je třikrát více než těch kteří stihnou vedle psaní taháku ještě psát SMS. Ani jeden ze studentů nezvládne všechny tři činnosti, 8 studentů píše tahák a nepovídá si při tom. Kolik studentů nedělá ani jednu z činností a dává pozor? Kolik studentů je zticha a píše SMS?



Tahák na biologii si píše 9 studentů $\Rightarrow$ $a+b+d+e=9$

na mobilu si ťuká SMS 10 přítomných $\Rightarrow$ $b+c+e+f=10$

12 studentů se tiše baví se spolusedícím $\Rightarrow$ $d+e+f+g=12$

Celkem je ve třídě 30 studentů $\Rightarrow$ $a+b+c+d+e+f+g+h=30$

6 jich dělá dvě z uvedených činností najednou $\Rightarrow$ $b+d+f=6$

Studentů, kteří si pouze píšou tahák je třikrát více než těch kteří stihnou vedle psaní taháku ještě psát SMS $\Rightarrow$ $a=3(b+e)$

Ani jeden ze studentů nezvládne všechny tři činnosti $\Rightarrow$ $e=0$

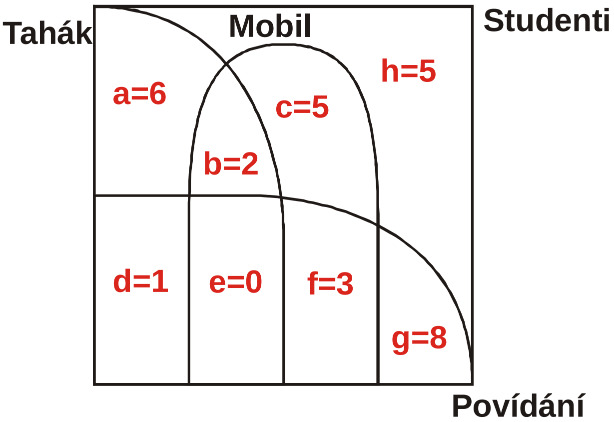
8 studentů píše tahák a nepovídá si při tom. $\Rightarrow$ $a+b=8$

$$a+b+d+e=9$$
$$b+c+e+f=10$$
$$d+e+f+g=12$$
$$a+b+c+d+e+f+g+h=30$$
$$b+d+f=6$$
$$a=3b+3e$$
$$e=0$$
$$a+b=8$$

Dosadíme za e do ostatních rovnic:

$$a+b+d=9$$
$$b+c+f=10$$
$$d+f+g=12$$
$$a+b+c+d+f+g+h=30$$
$$b+d+f=6$$
$$a=3b$$
$$a+b=8$$

Z předposlední rovnice dosadíme do poslední:
$3b+b=8 \Rightarrow b=2$
$a=6$
Dosadíme za *a*, *b* do ostatních rovnic
$6+2+d=9 \Rightarrow d=1$
$2+c+f=10$
$d+f+g=12$
$6+2+c+d+f+g+h=30$
$2+d+f=6$
Dosadíme za *d* do ostatních rovnic:
$c+f=8$
$1+f+g=12$
$6+2+c+1+f+g+h=30$
$1+f=4 \Rightarrow f=3$
Dosadíme *f* do ostatních rovnic:
$c+3=8 \Rightarrow c=5$
$1+3+g=12 \Rightarrow g=8$
$5+3+8+h=21 \Rightarrow h=5$



Dává pozor (množina *h*) 5 studentů.
Nebaví se a píše SMS (množina $b+c$) 7 studentů.

Př. 9: Urči pravdivostní hodnoty formule $[\neg(a \wedge b) \wedge c] \Leftrightarrow [a \wedge \neg(b \wedge c)]$.

Sestavíme a vyplníme tabulku pro zjišťování pravdivostních hodnot.

a	b	c	$\neg(a \wedge b)$	$\neg(a \wedge b) \wedge c$	$\neg(b \wedge c)$	$a \wedge \neg(b \wedge c)$	$(\ ) \Leftrightarrow (\ )$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1

Př. 10: Zneguj výroky.
a) Jestli se nic nestane a s fabrikou to půjde takhle dál, příští rok budeme bez práce.
b) Zahřmělo, právě když jsem se vracel domů a přecházel jsem ulici.
c) Jestli se to zase nepovede, tak to vzdám a půjdu dělat něco užitečnějšího.

a) Jestli se nic nestane a s fabrikou to půjde takhle dál, příští rok budeme bez práce.
Tvarů výroku: $(a \wedge b) \Rightarrow c$.
Negace: $(a \wedge b) \wedge \neg c$.
Nic se nestane, s fabrikou to půjde takhle dál a příští rok nebudeme bez práce.

b) Zahřmělo, právě když jsem se vracel domů a přecházel jsem ulici.
Tvarů výroku: $a \Leftrightarrow (b \wedge c)$.
Negace: $\neg a \Leftrightarrow (b \wedge c)$ nebo $a \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg c)$.
Nezahřmělo, právě když jsem se vracel domů a přecházel jsem ulici.
Zahřmělo, právě když jsem se nevracel domů nebo jsem nepřecházel ulici.

c) Jestli se to zase nepovede, tak to vzdám a půjdu dělat něco užitečnějšího.
Tvarů výroku: $a \Rightarrow (b \wedge c)$.
Negace: $a \Rightarrow \neg b \vee \neg c$.
Zase se to nepovede a nevzdám to nebo nepůjdu dělat něco užitečnějšího.

Př. 11: Najdi mezi výrazy výroky, urči jejich pravdivostní hodnotu a zneguj je.
a) $\forall n \in N : n^2 > n$ b) $\exists x \in R, \forall n \in N : x^2 < n$
c) $\exists x \in R : x^2 + y > 2$

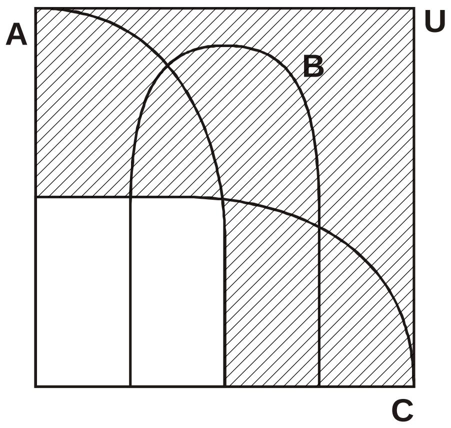
a) $\forall n \in N : n^2 > n$
Jde o výrok.
Výrok není pravdivý (neplatí pro $n = 1$, protože $1^2 = 1$).
Negace: $\exists n \in N : n^2 \lesseqqgtr n$.

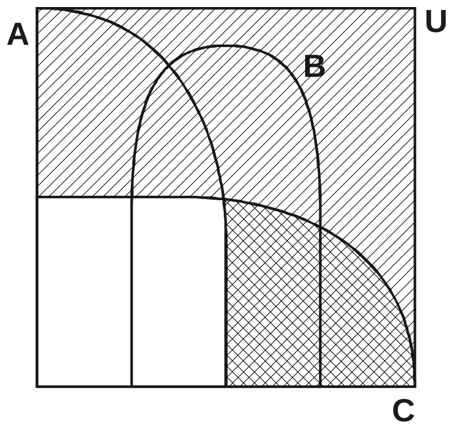
b) $\exists x \in R, \forall n \in N : x^2 < n$
Jde o výrok.
Výrok je pravdivý (za *x* můžeme volit libovolné číslo z intervalu $(-1;1)$ jejichž druhá mocnina je menší než 1.
Negace: $\forall x \in R, \exists n \in N : x^2 \geq n$.

c) $\exists x \in R : x^2 + y > 2$
Nejde o výrok (není definováno *y*).

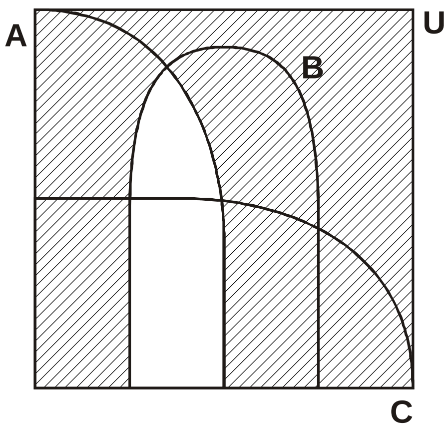
Př. 12: Pomocí Vennových diagramů zjednoduš $[C \cap (A \cap C)'] \cup \{A \cup [B \cap (A \cap B)']\}$.

Pomocí Vennových diagramů zobrazíme množinu $[C \cap (A \cap C)'] \cup \{A \cup [B \cap (A \cap B)']\}$ a poté zkusíme najít jednodušší vyjádření.
$(A \cap C)'$ $C \cap (A \cap C)'$

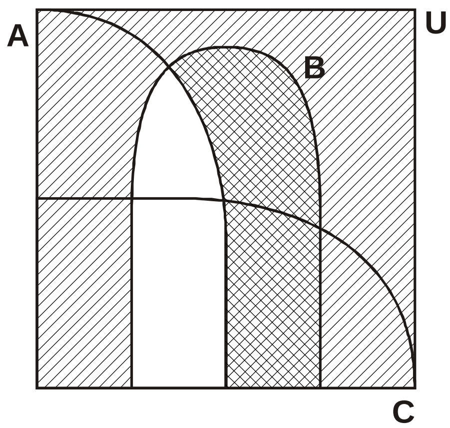




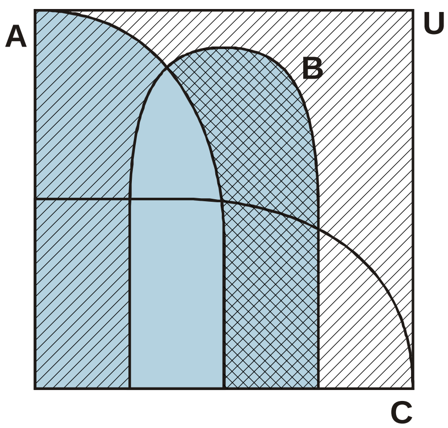
$(A \cap B)'$



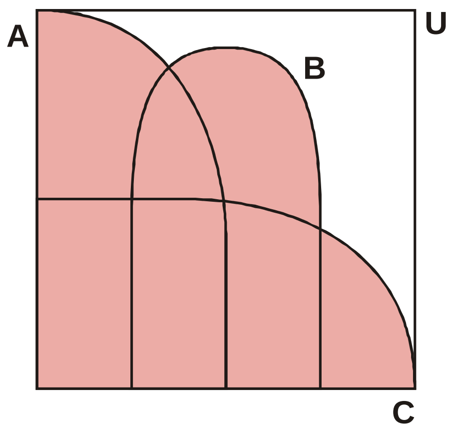
$B \cap (A \cap B)'$



$A \cup \left[B \cap (A \cap B)' \right]$



$[C \cap (A \cap C)'] \cup \{A \cup [B \cap (A \cap B)']\}$



Z obrázku vidíme, že danou množinu můžeme jednodušeji zapsat jako $A \cup B \cup C$.

Př. 13: Rozhodni, zda následující výroky patří mezi tautologie.

a) $\left[a \Rightarrow (b \vee c) \right] \Leftrightarrow \left[(a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c) \right]$

b) $[a \wedge \neg b \wedge c] \Rightarrow \left[b \Rightarrow (a \vee b) \right]$

Vyplníme tabulky pravdivostních hodnot.

a) $\left[a \Rightarrow (b \vee c) \right] \Leftrightarrow \left[(a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow c) \right]$

a	b	c	$a \Rightarrow (b \vee c)$	$a \Rightarrow b$	$a \Rightarrow c$	$(\ ) \vee (\ )$	$[\ ] \Leftrightarrow [\ ]$

1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Ve sloupci pro výrok $[\ ]\Leftrightarrow[\ ]$ jsou pouze 1 $\Rightarrow$ výrok $\left[a\Rightarrow(b\vee c)\right]\Leftrightarrow\left[(a\Rightarrow b)\vee(a\Rightarrow c)\right]$ je tautologií.

b) $[a\wedge\neg b\wedge c]\Rightarrow\left[b\Rightarrow(a\vee b)\right]$

a	b	c	$a\wedge\neg b\wedge c$	$a\vee b$	$b\Rightarrow(a\vee b)$	$[\ ]\Rightarrow[\ ]$
1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1

Výrok $[a\wedge\neg b\wedge c]\Rightarrow\left[b\Rightarrow(a\vee b)\right]$ je tautologií.

Shrnutí: